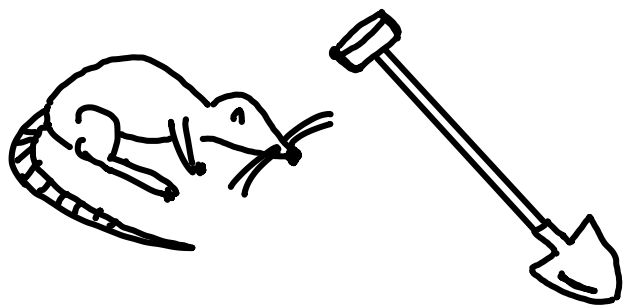




Intégrale curviligne

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f \in C^0(\Omega)$, $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\Gamma \subseteq \Omega$ une courbe régulière de paramétrisation $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma$.

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt$$

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle$$

→ $\int_{\Gamma} f dl$ ne dépend pas du choix de γ

→ $|\int_{\Gamma} F \cdot dl|$ ne dépend pas du choix de γ , le signe de $\int_{\Gamma} F \cdot dl$ dépend du

sens de parcours :

Example 2.6

(i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 1 - y^2$.

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \quad \int_{\Gamma} f \, dl.$$

↳ le cercle unité

↳ en coordonnées polaires

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

$$\int_{\Gamma} f \, dl = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) \cdot 1 \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt.$$

$$\begin{aligned} \cos^2 t &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2it} + 2 + e^{-2it}}{4} = \frac{1}{2} \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f d\ell = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} dt = \left[\frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \pi.$$

(ii) $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $F(x, y) = (-y, x)$

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\Rightarrow \gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ définie par } \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$\tilde{\gamma}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = (\cos t, -\sin t)$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} F \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

(iii) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x, y, z) = \sqrt{1 + |x + 2y - z|}$

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq y \leq 1, x = z = \sqrt{y}\}$$

$y = t$
 $x = z = \sqrt{t}$

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (t, t^2, t)$$

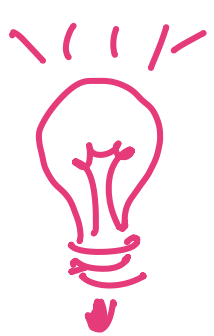
$$\gamma'(t) = (1, 2t, 1), \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 1} = \sqrt{2} \sqrt{1 + 2t^2}$$

$$\int_T f dl = \int_0^1 f(t, t^2, t) \cdot \sqrt{2} \sqrt{1 + 2t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + |t + 2t^2 - t|} \cdot \sqrt{2} \sqrt{1 + 2t^2} dt$$

$$= \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1 + 2t^2} \cdot \sqrt{1 + 2t^2} dt = \sqrt{2} \int_0^1 1 + 2t^2 dt = \sqrt{2} \left[t + \frac{2}{3} t^3 \right]_{t=0}^{t=1} \\ = \frac{\sqrt{2} \cdot 5}{3}$$

§ 2.3 Champs qui dérivent d'un potentiel



$\mathbb{R}$
 $\neq$
 $\int f$

$\mathbb{R}^n$
 ∇f
 $?$

Définition 2.7 : Champ qui dérive d'un potentiel
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$. On dit que F
dérive d'un potentiel si $\exists f \in C^1(\Omega)$ tq
 $\nabla f = F$ dans Ω .
On appelle alors, f un potentiel de F .

Proposition 2.8

Soit $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ un champ vectoriel qui dérive d'un
potentiel $f \in C^1(\Omega)$. Soit $T \subseteq \Omega$ une courbe régulière
de paramétrisation $\gamma: [a, b] \rightarrow T$. Alors,

$$\int_T F \cdot dl = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Preuve :

$$\text{On a } \frac{d}{dt} [f(x(t))] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \cdot x'_i(t)$$

$$= \langle \nabla f(x(t)), x'(t) \rangle$$

$$= \langle F(x(t)), x'(t) \rangle$$

$$\text{Donc, } \int_{\gamma} F \cdot dl = \int_a^b \langle F(x(t)), x'(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} [f(x(t))] dt$$

$$= [f(x(t))]_{t=a}^{t=b} = f(x(b)) - f(x(a))$$

$\square$

Remarque 2.9

Si le potentiel existe, il en existe une infinité si $\nabla f = F$
et $c \in \mathbb{R}$, $\nabla [f+c] = F$.

Théorème 2.10

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$

(i) Condition nécessaire :

Si F dérive d'un potentiel sur Ω , on a $\forall 1 \leq i, j \leq n$,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

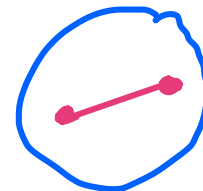
(ii) Condition suffisante :

$$\text{Si } \forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

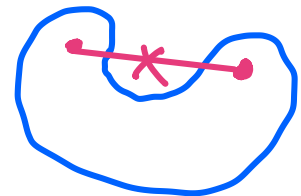
F dérive d'un potentiel

et Ω est convexe,

$\rightarrow \forall A, B \in \Omega$
 $[A, B] \subset \Omega$



convexe ✓



pas convexe ✓

Preuve:

(i) Soit $f \in C^2(\Omega)$ tq $\nabla f = F$. Alors,

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \stackrel{f \in C^2}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

$F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

(ii) Soit $x_0 \in \Omega$. Définissons $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^1 \left\langle \underbrace{F(x_0 + t(x-x_0))}_{\gamma(t)}, \underbrace{(x-x_0)}_{\gamma'(t)} \right\rangle dt$$

$$\Gamma = [x_0, x]$$

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \Gamma$$

$$t \mapsto \gamma(t) = x_0 + t(x-x_0)$$

$$= \int_{[x_0, x]} F \cdot dl.$$

Alors, on peut voir série⁴, $n=2$, $x_0=0$)

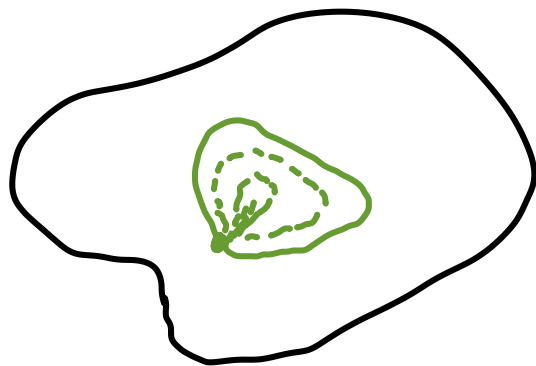
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t \cdot F_i(x_0 + t(x-x_0))] dt.$$

$$= [t \cdot F_i(x_0 + t(x-x_0))]_{t=0}^{t=1} = 1 \cdot F_i(x) - 0 \cdot F_i(x_0) = F_i(x).$$

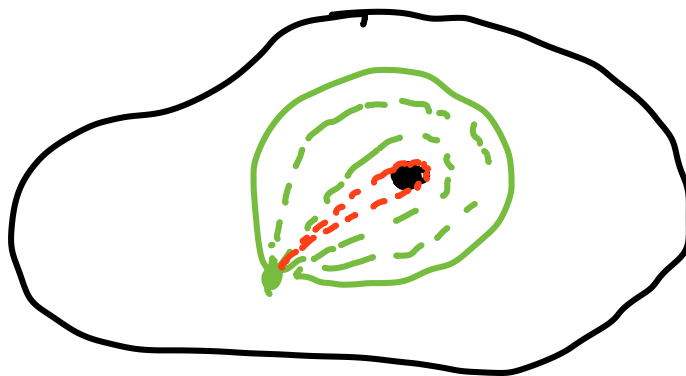
Remarque 2.11

- (i) La condition nécessaire n'est pas suffisante. Pour qu'elle le devienne, il nous faut une hypothèse sur Ω .
- (ii) La condition de convexité sur Ω n'est pas optimale, en réalité la bonne condition est que Ω est simplement convexe

$\mathbb{R}^2$



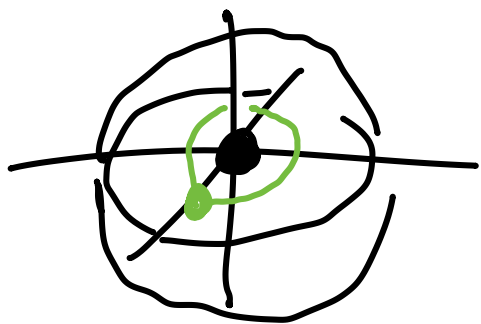
simplement
convexe ✓



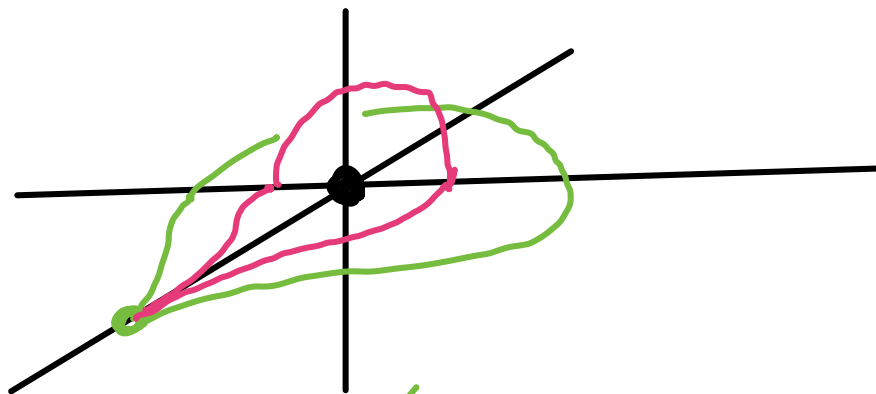
pas simplement convexe ✗

Dans $\mathbb{R}^2$, simplement
convexe $\Leftrightarrow$ pas de
trou dans le domaine

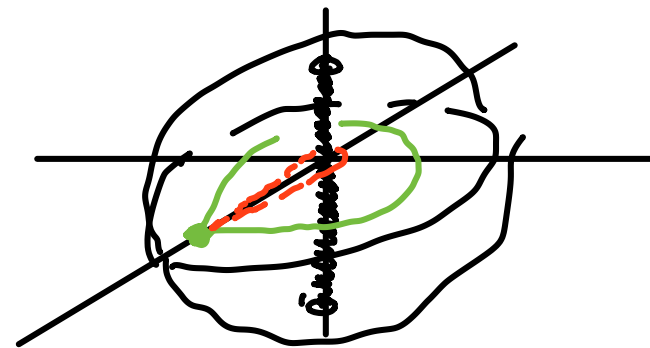
$\mathbb{R}^3$



simplement convexe ✓



pas simplement
convexe ✗



Dans $\mathbb{R}^3$



Simplement connexe :
Bien pour les champs qui dérivent d'un potentiel
Pas bien pour cadenasser son vélo



Pas simplement connexe :
Pas bien pour les champs qui dérivent d'un potentiel
Bien pour cadenasser son vélo

$$(iii) \text{ Si } n=2,3, \forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

Théorème 2.12 :

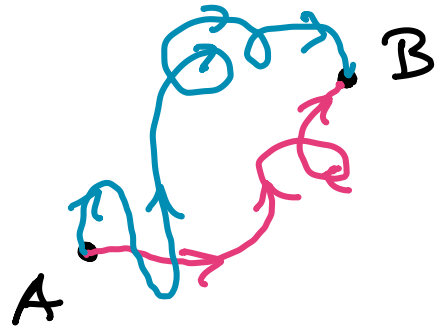
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ un champ vectoriel.

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) F dérive d'un potentiel sur Ω

(ii) $\forall A, B \in \Omega$ et $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq \Omega$ deux courbes régulières joignant A à B , on a

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dl = \int_{\gamma_2} F \cdot dl$$



(iii) $\forall \gamma \subseteq \Omega$ courbe régulière fermée, on a $\int_{\gamma} F \cdot dl = 0$.

Preuve :
 (i) $\Rightarrow$ (ii)
 (i) $\Rightarrow$ (iii)

déduite de la proposition 2.8

$$(ii) \int_{\overrightarrow{T_1}} F \cdot dl = f(B) - f(A) = \int_{\overrightarrow{T_2}} F \cdot dl.$$

$$(iii) \int_{\overrightarrow{T}} F \cdot dl = f(x(b)) - f(x(a)) = 0$$

$x(a) = x(b)$ car T fermée.

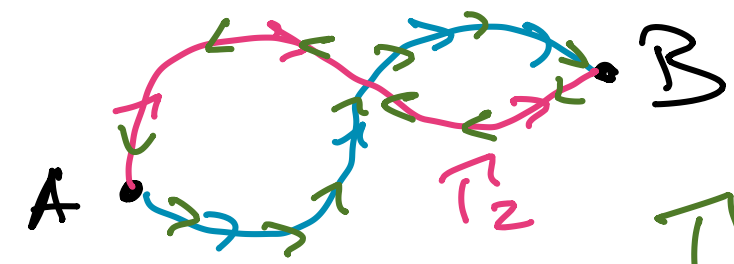
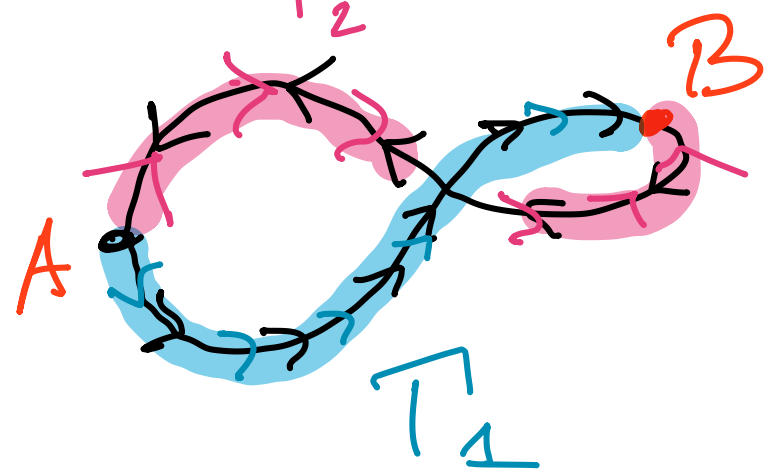
$\overrightarrow{T_2}$ est parcourue dans le sens opposé

$$\int_{\overrightarrow{T}} F \cdot dl = \int_{\overrightarrow{T_1}} F \cdot dl - \int_{\overrightarrow{T_2}} F \cdot dl$$

$$\stackrel{(ii)}{=} 0$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (ii)



$$T = T_1 \cup (-T_2)$$

la même courbe parcourue dans le sens opposé

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_{\Gamma_1} F \cdot dl - \int_{\Gamma_2} F \cdot dl$$

$$(iii) \Rightarrow \int_{\Gamma} F \cdot dl = 0 \quad \Rightarrow \int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_{\Gamma_2} F \cdot dl$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $x_0 \in \Omega$, et $\forall x \in \Omega$, soit Γ_x une courbe régulière joignant x_0 à x . On pose $f(x) = \int_{\Gamma_x} F \cdot dl$.
 Alors, f est un potentiel de $\overline{F}$.

Remarque 2.13 M-a-s pour la question F dérive d'un potentiel?

Step 1: Calculer $\text{rot}(F)$

→ $\text{rot } F \neq 0$ la réponse est non! (thm 2.10)

→ $\text{rot } F = 0$, aller à l'étape 2.

Step 2: Ω est-il simplement connexe?

→ si oui, F dérive d'un potentiel (thm 2.10, rem 2.11)

→ si non, aller à l'étape 3

Step 3: Choisir entre

On intègre: $f(x, y, z) = \int^x F_1(t, y, z) dt + \alpha(y, z)$.

On essaie d'ajuster α tq

$$\nabla f = F.$$

→ si on y arrive, on a le potentiel,

→ si on y arrive pas, essayer l'autre

Choisir $\gamma \subseteq \Omega$, une courbe régulière fermée qui entoure exactement un trou du domaine et calculer $\int_{\gamma} F \cdot dl$. Si $\int_{\gamma} F \cdot dl \neq 0 \rightarrow$ la réponse est non! (thm 2.12)

si $\int_{\gamma} F \cdot dl = 0 \rightarrow$ essayer une autre courbe autour d'un trou différent

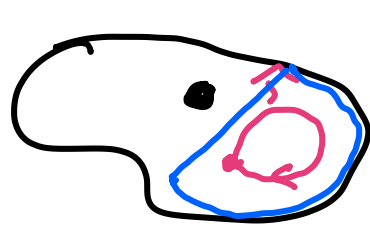
Réponses jamais acceptées:

"F ne dérive pas d'un potentiel car je ne trouve pas de f tq $\nabla f = F$ "

"F dérive d'un potentiel car je ne trouve pas de courbe γ fermée tq $\int_{\gamma} F \cdot dl \neq 0$ "

Pourquoi γ doit entourer exactement 1 trou du domaine.

pourquoi pas 0?



Ω'

$$\text{rot } F = 0$$

$\Rightarrow F$ à rotationnel nul sur

Ω' qui est simplement connexe.

$\Rightarrow F$ dérive d'un potentiel sur Ω'

$$\Rightarrow \int_{\gamma} F \cdot dl = 0$$